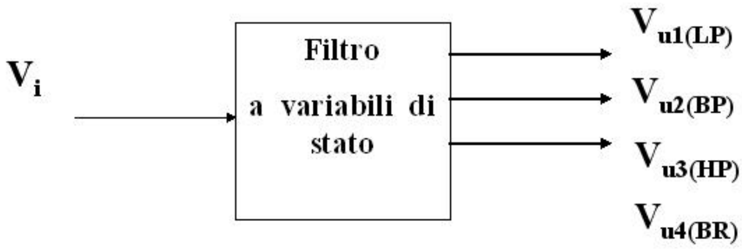
Filtro universale o a variabile di stato

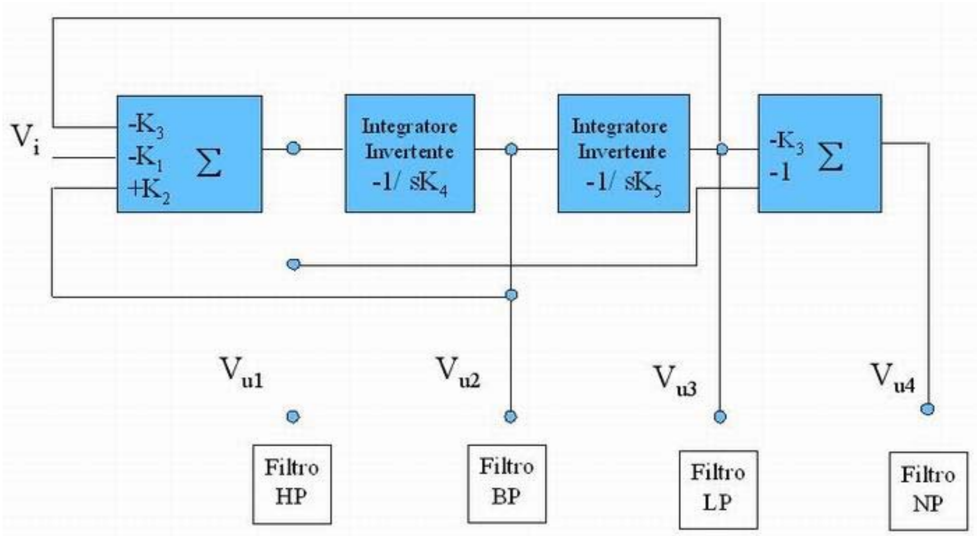
Filtro a variabili di stato: generalità

Un filtro a variabili di stato è un circuito ad un ingresso e quattro uscite, che consente di realizzare qualsiasi filtro del secondo ordine, cioè passa-basso, passa-alto, passa-banda, escludi-banda.

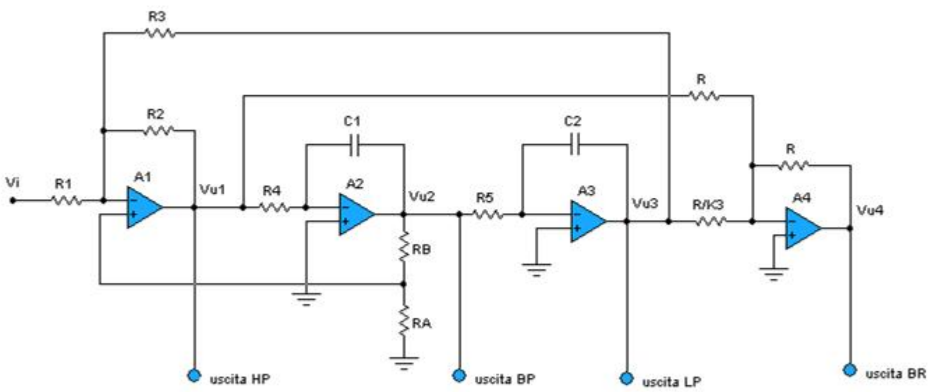


Un filtro a variabili di stato è in genere realizzato in circuito integrato ed è costituito da n.4 blocchi: un circuito sommatore due circuiti integratori uguali circuito sommatore a) l'uscita dal primo blocco è l'uscita passa-alto (HP), b) l'uscita dal secondo blocco è l'uscita passa-banda (BP), c) l'uscita dal terzo blocco è l'uscita passa-basso (LP), d) l'uscita dal quarto blocco è l'uscita escludi-banda (BR) Con l'aggiunta di opportune resistenze esterne è possibile regolare i valori di Q, ωo, Ao ottenendo qualsiasi tipo di risposta Butterworth, Bessel o Chebyschev

Schema a blocchi di un filtro universale (UAF) o a variabili di stato di tipo invertente



Schema elettrico e studio di un filtro universale a variabili di stato di tipo invertente



Studio primo stadio

Primo stadio

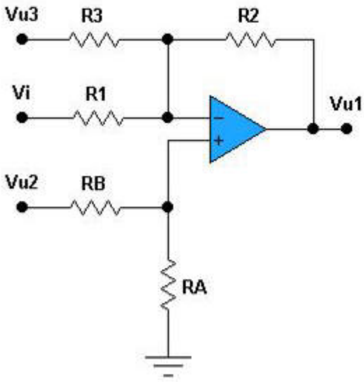
Calcolo dell' uscita del primo stadio.

$$Vu_1 = -\frac{R_2}{R_1}V_i - \frac{R_2}{R_3}V_{u3} + \frac{R_A}{R_A + R_B}\left(1 + \frac{R_2}{R_1 // R_3}\right)V_{u2}$$

ponendo:

$$K_1 = \frac{R_2}{R_1}; \quad K_2 = \frac{R_A}{R_A + R_B}\left(1 + \frac{R_2}{R_1 // R_3}\right); \quad K_3 = \frac{R_2}{R_3}$$

avremo: $Vu_1 = -K_1V_i - K_3V_{u3} + K_2V_{u2}$



Studio secondo stadio

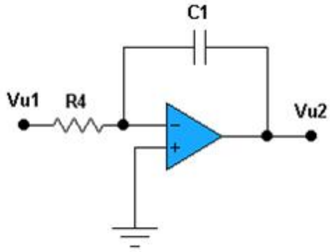
Secondo stadio

La tensione d'uscita del secondo stadio sarà:

$$Vu_2 = -\frac{Vu_1}{s}\left(\frac{1}{R_4C_1}\right)$$

ponendo: $K_4 = R_4C_1$

avremo: $Vu_2 = -\frac{Vu_1}{K_4s}$



Studio terzo stadio

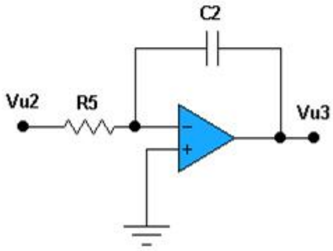
Terzo stadio

La tensione di uscita dal terzo stadio è:

$$Vu_3 = -\frac{Vu_2}{s}\left(\frac{1}{R_5C_2}\right) = -\frac{Vu_1}{s}\left(\frac{1}{R_4R_5C_2C_1}\right)$$

ponendo: $K_5 = R_5C_2$

avremo: $Vu_3 = -\frac{Vu_2}{K_5s} = -\frac{Vu_1}{K_4K_5s^2}$

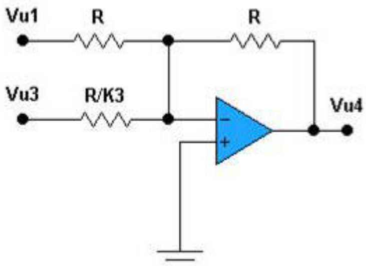


Studio quarto stadio

Quarto stadio

La tensione di uscita dal quarto stadio è:

$$Vu_4 = -Vu_1 - K_3Vu_3$$



Riepilogo coefficienti K_i				
$K_1=\frac{R_2}{R_1}$	$K_2=\frac{R_A}{R_A+R_B}\left(1+\frac{R_2}{R_1 // R_3}\right)$	$K_3=\frac{R_2}{R_3}$	$K_4=R_4C_1$	$K_5=R_5C_2$

Uscita primo stadio

◁ **Dimostriamo di seguito che l'uscita del 1° stadio è quella di un filtro passa-alto:**

$$Vu_1=-K_1Vi+K_2Vu_2-K_3Vu_3$$

Sostituendo in tale espressione i valori delle uscite dei singoli stadi si ha:

$$Vu_1=-K_1Vi-K_2\frac{Vu_1}{K_4s}-K_3\frac{Vu_1}{K_4K_5s^2} \Rightarrow \quad Vu_1+K_2\frac{Vu_1}{K_4s}+K_3\frac{Vu_1}{K_4K_5s^2}=-K_1Vi \Rightarrow$$

$$Vu_1\left(1+\frac{K_2}{K_4s}+K_3\frac{K_3}{K_4K_5s^2}\right)=-K_1Vi$$

$$G_1(s)=\frac{Vu_1}{Vi}=-\frac{K_1}{1+\frac{K_2}{K_4s}+\frac{K_3}{K_4K_5s^2}}=-\frac{K_1K_4K_5s^2}{K_4K_5s^2+K_2K_5s+K_3}=-\frac{K_1s^2}{s^2+\frac{K_2}{K_4}s+\frac{K_3}{K_4K_5}}=$$

$$=\frac{A_{01}s^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^{\,2}} \Rightarrow$$

$$A_{01}=-K_1;\quad \omega_0=\sqrt{\frac{K_3}{K_4K_5}}\quad ;\quad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{K_2}{K_4}\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q}=K_2\sqrt{\frac{K_5}{K_3K_4}}$$

Uscita secondo stadio

Dimostriamo che l'uscita del 2° stadio è quella di un filtro passa-banda (BP):

$$Vu_2=-\frac{Vu_1}{K_4s} \quad \Rightarrow \quad G_2(s)=\frac{Vu_2}{Vi}=\frac{\frac{Vu_1}{Vi}}{K_4s}$$

Sostituendovi l'espressione della $\frac{Vu_1}{Vi}$ si ha:

$$G_2(s)=\frac{\frac{K_1s^2}{s^2+s\frac{K_2}{K_4}+\frac{K_3}{K_4K_5}}}{K_4s}=\frac{\frac{K_1}{K_4}s}{s^2+s\frac{K_2}{K_4}+\frac{K_3}{K_4K_5}}=\frac{A_0\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2+s\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^{\,2}}$$

da cui si deduce:

$$\frac{\omega_0}{Q}=\frac{K_2}{K_4}$$

$$A_0\frac{\omega_0}{Q}=\frac{K_1}{K_4} \Rightarrow A_0\cdot\frac{K_2}{K_4}=\frac{K_1}{K_4} \Rightarrow A_0=\frac{K_1}{K_4}\cdot\frac{K_4}{K_2} \Rightarrow A_0=\frac{K_1}{K_2}$$

$$\frac{1}{Q}=K_2\sqrt{\frac{K_4}{K_3K_5}}$$

Uscita terzo stadio

L'uscita del terzo stadio è quella di un filtro passa - basso (LP):

$$V_{u3} = \frac{V_{u1}}{s^2 K_4 K_5}$$

$$G_3(s) = \frac{Vu_3}{Vi} = \frac{\frac{V_{u1}}{Vi}}{s^2 K_4 K_5} = -\frac{\frac{K_1 s^2}{s^2 + s\frac{K_2}{K_4} + \frac{K_3}{K_4 K_5}}}{s^2 K_4 K_5} = -\frac{\frac{K_1}{K_4 K_5}}{s^2 + s\frac{K_2}{K_4} + \frac{K_3}{K_4 K_5}} = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

da cui si deduce:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_3}{K_4 K_5}}$$

$$A_0 \omega_0^2 = -\frac{K_1}{K_4 K_5} \quad \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{K_1}{K_4 K_5}\right) = -\frac{K_4 K_5}{K_3} \cdot \frac{K_1}{K_4 K_5} = -\frac{K_1}{K_3}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{K_2}{K_4} \Rightarrow \frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{K_2}{K_4} = \sqrt{\frac{K_4 K_5}{K_3}} \cdot \frac{K_2}{K_4} = K_2 \sqrt{\frac{K_5}{K_3 K_4}}$$

Uscita quarto stadio

L'uscita del quarto stadio è quella di un filtro escludi - banda (NP):

$$\frac{Vu_4}{V_i} = -\frac{Vu_1}{V_i} - K_3 \frac{Vu_3}{V_i}$$

$$G_4(s) = \frac{Vu_4}{Vi} = -\frac{K_1 s^2}{s^2 + s\frac{K_2}{K_4} + \frac{K_3}{K_4 K_5}} - = -K_3 \frac{\frac{K_1}{K_4 K_5}}{s^2 + s\frac{K_2}{K_4} + \frac{K_3}{K_4 K_5}} = \frac{K_1\left(s^2 + \frac{K_3}{K_4 K_5}\right)}{s^2 + s\frac{K_2}{K_4} + \frac{K_3}{K_4 K_5}} =$$

$$= \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

da cui si deduce:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_3}{K_4 K_5}}$$

$$A_0 = K_1$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{K_2}{K_4} \Rightarrow \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{K_2}{K_4} = \sqrt{\frac{K_4 K_5}{K_3}} \cdot \frac{K_2}{K_4} = K_2 \sqrt{\frac{K_5}{K_3 K_4}}$$

Espressioni dei parametri A_o, ω_o, $1/Q$ in funzione delle costanti di tempo dello schema a blocchi

<table>
<tr><th>Uscita</th><th>A_o</th><th>ω_o</th><th>$1/Q$</th></tr>
<tr><td>HP</td><td>$-K_1$</td><td rowspan="4">$\sqrt{\dfrac{K_3}{K_4 K_5}}$</td><td rowspan="4">$K_2 \sqrt{\dfrac{K_4}{K_3 K_5}}$</td></tr>
<tr><td>BP</td><td>K_1/K_2</td></tr>
<tr><td>LP</td><td>$-K_1/K_3$</td></tr>
<tr><td>NP</td><td>K_1</td></tr>
</table>